Avertissement : Ces exercices te permettront de t'entraîner pour l'examen, ***sans*** toutefois te dispenser de refaire les exercices du cours, les questions de vérification de la compréhension (catherine.scolas.be) et ceux des interrogations.

Il est impossible de couvrir en quelques pages l'ensemble des exercices vus durant le premier trimestre.

Ces quelques pages ne sont donc pas du tout un substitut du cours !

FONCTIONS RECIPROQUES ET CYCLOMETRIQUES

1. Détermine le domaine de définition et l'ensemble-image des fonctions suivantes. Précise si elles sont injectives et donne, le cas échéant, leur fonction réciproque. Dans le cas contraire, restreins le domaine de ces fonctions de manière à obtenir une fonction injective et détermine alors également la fonction réciproque.

   (1) $f(x)=\dfrac{x}{2}-5$

   (2) $f(x)=x^2-2x+1$

   (3) $f(x)=\dfrac{3x-2}{1-x}$

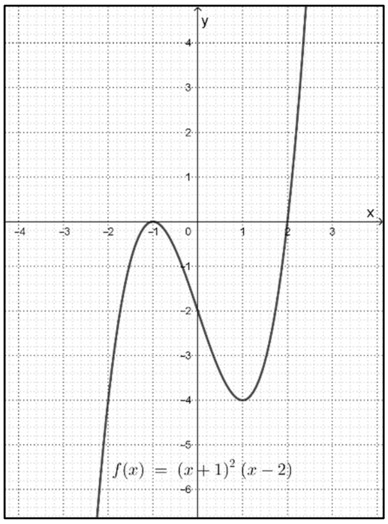
   (4) $f(x)=(x-2)^2+3$

   (5) $f(x)=2\sqrt{x+3}$

Solutions :

Fonction	$dom\, f$	$\operatorname{Im} f$	$dom_r f$	$f^{-1}(x)$
$f(x)=\dfrac{x}{2}-5$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	*f* est injective (il s'agit d'une droite)	$f^{-1}(x)=2x+10$
$f(x)=x^2-2x+1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	*f* n'est pas injective (il s'agit d'une parabole) Ainsi, $dom\, f_r=[1;+\infty[$	$f^{-1}(x)=\sqrt{x}+1$

$f(x)=\dfrac{3x-2}{1-x}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-3\}$	*f* est injective (il s'agit d'une fonction homographique)	$f^{-1}(x)=\dfrac{-1}{x+3}+1=\dfrac{x+2}{x+3}$
$f(x)=(x-2)^2+3$	$\mathbb{R}$	$[3;+\infty[$	*f* n'est pas injective (il s'agit d'une parabole) Ainsi, $dom\, f_r=[2;+\infty[$	$f^{-1}(x)=\sqrt{x-3}+2$
$f(x)=2\sqrt{x+3}$	$[-3;+\infty[$	$\mathbb{R}^+$	*f* est injective (son graphique est obtenu par manipulations de la fonction racine carrée)	$f^{-1}(x)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-3$ avec $x\in\mathbb{R}^+$



2. Explique pourquoi la fonction $f(x)=(x+1)^2.(x-2)$ (représentée ci-contre) n'est pas bijective.

   Sol : La fonction *f* n'est pas bijective car elle n'est pas injective. En effet, deux réels différents n'ont pas toujours des images différentes (c'est le cas pour -2 et 1)

3. Donne les conditions d'existence, le domaine de définition, la(les) racine(s) et la dérivée des fonctions suivantes :

   (1) $f(x)=\arcsin(1-2x)$

   (2) $f(x)=\arccos(2x+3)$

   (3) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x-1}{1+x}\right)$

   (4) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2x+3}$

   (5) $f(x)=\arcsin\left(x^2-2x\right)$

   (6) $f(x)=\dfrac{1}{\arcsin x}$

Solutions :

Fonction	CE	Domaine	Racine(s)	Dérivée
$f(x)=\arcsin(1-2x)$	$-1\leq 1-2x\leq 1$	$[0;1]$	$x=\frac{1}{2}$	$f'(x)=\frac{-2}{\sqrt{-4x^2+4x}}$
$f(x)=\arccos(2x+3)$	$-1\leq 2x+3\leq 1$	$[-2;-1]$	$x=-1$	$f'(x)=\frac{-2}{\sqrt{-4x^2-12x-8}}$
$f(x)=\arctan\left(\frac{x-1}{1+x}\right)$	$x+1\neq 0$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$x=1$	$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}$
$f(x)=\arcsin\frac{x-1}{2x+3}$	$-1\leq\frac{x-1}{2x+3}\leq 1$ et $2x+3\neq 0$	$]-\infty;-4]\cup\left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$	$x=1$	$f'(x)=\frac{5.\|2x+3\|}{\sqrt{3x^2+14x+8}.(2x+3)}$
$f(x)=\arcsin(x^2-2x)$	$-1\leq x^2-2x\leq 1$	$[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]$	$x=0$ et $x=2$	$f'(x)=\frac{2x-2}{\sqrt{-x^4+4x^3-4x^2+1}}$
$f(x)=\frac{1}{\arcsin x}$	$-1\leq x\leq 1$ et $\arcsin x\neq 0$	$[-1;1]\setminus\{0\}$	$\varnothing$	$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}.\arcsin^2 x}$

4. Trace le graphe des fonctions suivantes au départ des fonctions usuelles et détermine leurs domaine, racine(s), ensemble-image et éventuelles asymptotes :
   (1) $f(x)=2.\arcsin(2x)$
   (2) $f(x)=2-\arcsin(1-2x)$
   (3) $f(x)=\arctan(x+1)$

Solutions :

Fonction	Domaine	Racine(s)	Ensemble-image	Asymptotes éventuelles
$f(x)=2.\arcsin(2x)$	$\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$	$x=0$	$[-\pi;\pi]$	Aucune
$f(x)=2-\arcsin(1-2x)$	$[0;1]$	Pas de racine	$\left[-\frac{\pi}{2}+2;\frac{\pi}{2}+2\right]$	Aucune
$f(x)=\arctan(x+1)$	$\mathbb{R}$	$x=-1$	$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$	$AH_{-\infty}\equiv y=-\frac{\pi}{2}$ $AH_{+\infty}\equiv y=\frac{\pi}{2}$

5. Vérifie les identités suivantes :

   (1) $\arcsin\left(\dfrac{2a}{1+a^2}\right) = 2.\arctan a$

   (2) $2.\arccos a = \arccos\left(2a^2 - 1\right)$

   (3) $\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{5} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

6. Résous, en n'oubliant pas les conditions d'existence :

   (1) $\arccos(x-1) + \arcsin\dfrac{3}{5} = \arctan 2$ *Calculatrice autorisée*

   CE : $-1 \leq x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

   $S = \left\{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}\right\}$ La solution $\dfrac{25-2\sqrt{5}}{25}$ est à rejeter.

   (2) $\arccos x = \arctan\dfrac{3}{4}$

   CE : $-1 \leq x \leq 1$

   $S = \left\{\dfrac{4}{5}\right\}$

   (3) $x - \arctan 1 = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   CE : aucune

   $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

   (4) $\arctan x + \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{4}$

   CE : aucune

   $S = \left\{-2+\sqrt{3}\right\}$

   (5) $\arctan(x-1) + \arctan\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \arctan x$

   CE : $x \neq -1$

   $S = \{2\}$

7. On considère l'équation $\arccos x = \arcsin(2x)$.

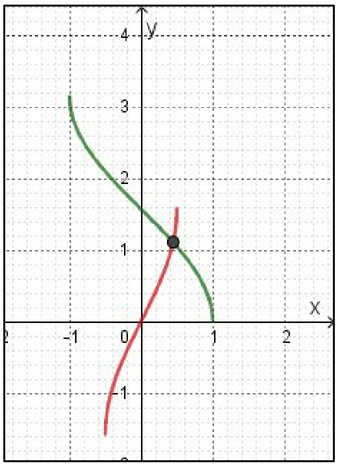
(1) Résous-la. Si une solution était à rejeter, expliques-en la raison.

CE1 : $-1 \leq x \leq 1$

CE2 : $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$S = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}$ La solution $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ est à rejeter car $\arccos(\textit{négatif}) = \textit{positif}$ et $\arcsin(\textit{négatif}) = \textit{négatif}$.

(2) Vérifie tes solutions en traçant les graphiques de $\arccos x$ et de $\arcsin(2x)$ dans un même repère et en repérant leur intersection.



8. On considère la fonction $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$.

(1) Détermine le domaine de *f*.

(2) Détermine f' et établis le tableau de variation de f .

(3) Indique les coordonnées de l'extremum de f . Précise s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

Sol : (1) $\textit{dom}\, f = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

(2) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{-x^4 + 2x^2}}$

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+
$\sqrt{-x^4+2x^2}$	$\nexists$	0	+	+	+	0	$\nexists$
f'	$\nexists$	$\nexists$	$-$		+	$\nexists$	$\nexists$
f	$\nexists$	$\nexists$	$\searrow$	Min $\left(0;-\frac{\pi}{2}\right)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nexists$

(3) Le point de coordonnées $\left(0;-\frac{\pi}{2}\right)$ est un minimum.

9. Vrai ou faux ?
   (1) $\arcsin 0 = \arctan 0$
   (2) Le nombre dérivé de la fonction $f(x)=\arcsin x$ en -1 n'existe pas.
   (3) $\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
   (4) $\arcsin 0,5=\frac{\pi}{6}$

   Sol : V/V/F/V

10. Détermine l'équation réduite de la tangente au graphe de la fonction $f(x)=\arctan(2x)$ au point d'abscisse 0.

    Sol : $T \equiv y = 2x$

11. Calcule les limites suivantes :

    (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\arcsin x}$ *Sol* : 1

    (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arctan x - x}{2x-\arcsin x}$ *Sol* : 1

    (3) $\lim\limits_{x\to 1}\arctan\frac{1}{x-1}$ *Sol* : $\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{x-1}=-\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 1}\arctan\frac{1}{x-1}=\frac{\pi}{2}$

    (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan(2x)-2x}{3x-\arcsin(3x)}$ *Sol* : $\frac{16}{27}$

12. Détermine l'équation réduite de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = \arctan \dfrac{1}{1-x}$ au point d'abscisse 0.

$Sol : \ y = \dfrac{1}{2}x + 0,79$

13. Associe chaque expression analytique à son graphique. Justifie ton choix.

(1) $f(x) = \arccos |x|$

(2) $g(x) = \arcsin \dfrac{1}{x}$

(3) $h(x) = \dfrac{1}{2}.\arccos \dfrac{x}{4}$

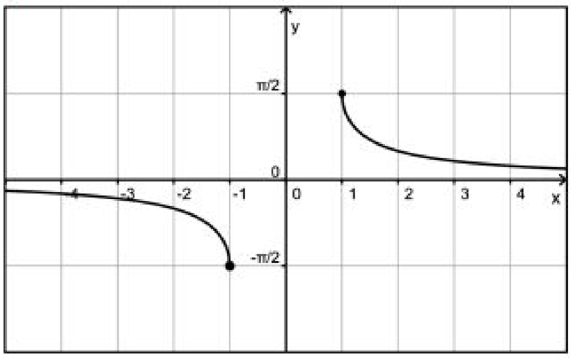
(4) $i(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$

(5) $j(x) = \arcsin |x|$

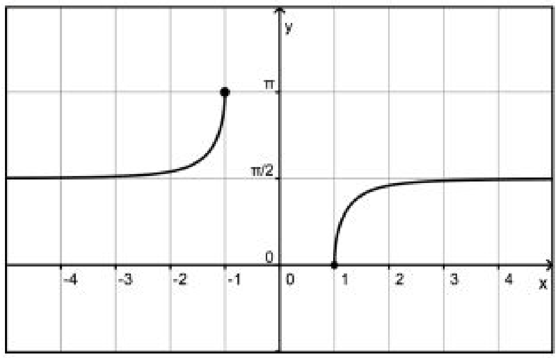
(6) $k(x) = \arcsin \dfrac{x}{4}$

(7) $l(x) = \arccos \dfrac{1}{x^3}$

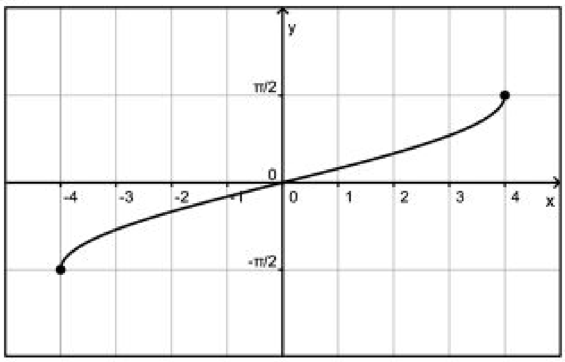
①



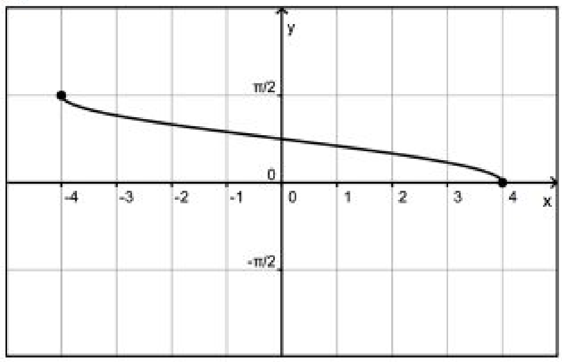
②



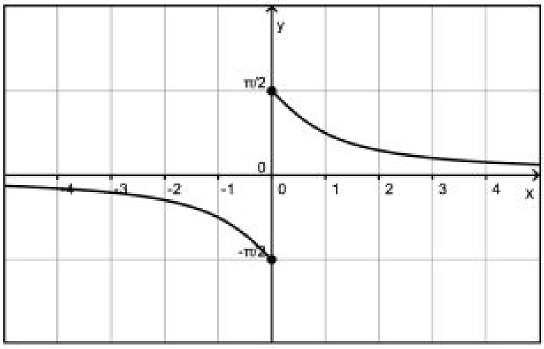
③



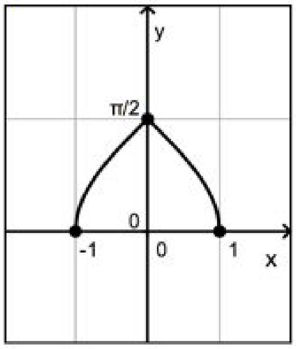
④



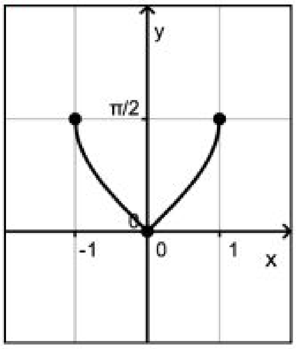
⑤



⑥



⑦



<table>
<tr><td>Graphique</td><td>Fonction</td><td rowspan="8">Pour justifier son choix, on peut :
- Utiliser les manipulations graphiques
- Calculer des limites en l’infini
- Calculer certaines images</td></tr>
<tr><td>1</td><td>g</td></tr>
<tr><td>2</td><td>l</td></tr>
<tr><td>3</td><td>k</td></tr>
<tr><td>4</td><td>h</td></tr>
<tr><td>5</td><td>i</td></tr>
<tr><td>6</td><td>f</td></tr>
<tr><td>7</td><td>j</td></tr>
</table>

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

1. Evalue sans calculatrice :

	Solutions
(1) $\log_2 8$	3
(2) $\log_2 \frac{1}{4}$	-2
(3) $\log\left(\frac{1}{\sqrt[4]{10}}\right)$	$-\frac{1}{4}$
(4) $\log_3 \frac{1}{81}$	-4
(5) $\log_{16} \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
(6) $\ln\sqrt{e}$	$\frac{1}{2}$
(7) $\ln e^7$	7

2. Résous chaque (in)équation :

	Solutions :
(1) $2^{x^2} = 512$	$S = \{\pm 3\}$
(2) $7^{x^2+x} \geq 49$	$S =]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$
(3) $8^x > 0{,}0625$	$S = \left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$
(4) $\frac{1}{10^x} \leq 10\,000$	$S = [-4;+\infty[$
(5) $\frac{1}{3}.9^{2x} = 27^{x^2}$	$S = \left\{1;\frac{1}{3}\right\}$
(6) $3^x + 9^x = 90$	$S = \{2\}$
(7) $\left(2.\,5^x - 1\right)^2 = 5^x.\left(2 - 25^{\frac{x}{2}}\right)$	$S = \{0;-1\}$
(8) $\log_4 x = 3$	CE : $x > 0$ $S = \{64\}$

(9) $\log_x 125 = 3$

CE : $x \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

$S = \{5\}$

(10) $\log(x+1) - \log 3 = \log(2x-3) + \log 7$

CE1 : $x > -1$

CE2 : $x > \frac{3}{2}$

$S = \left\{\frac{64}{41}\right\}$

(11) $\log_3(2x-5) + \log_3(3x+7) = 4.\log_3 2$

CE1 : $x > \frac{5}{2}$

CE2 : $x > -\frac{7}{3}$

$S = \{3\}$

(12) $\ln(x^2 - 7) = 2.\ln(x+3)$

CE1 : $x < -\sqrt{7}$ ou $x > \sqrt{7}$

CE2 : $x > -3$

$S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$

(13) $\log(\sqrt{x+1}) + \log(\sqrt{x-1}) - \log 5 = 0$

CE1 : $x > -1$

CE2 : $x > 1$

$S = \{\sqrt{6}\}$

(14) $\log(x^2 + 3x - 1) = 2$

CE1 : $x < \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ ou $x > \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

$S = \{8{,}56; -11{,}56\}$

(15) $\log_2(x+1) + 2.\log_2 x \leq 1$

CE1 : $x > -1$

CE2 : $x > 0$

$S =]0;1]$

(16) $\log_3 x = \frac{1}{2} + \log_9(4x+15)$

CE1 : $x > 0$

CE2 : $x > -\frac{15}{4}$

$S = \{15\}$

(17) $e^{3x} = 5$

$S = \left\{\frac{\ln 5}{3}\right\}$

(18) $4.e^{-3x} - 3.e^{-x} - e^{x} = 0$

$S = \{0\}$

3. Résous l'inéquation $1+\ln\left(x+3\right)>\ln\left(x^2+2x-3\right)$ (*ULB, 2001*)

Sol : CE1 : $x>-3$, CE2 : $x<-3$ ou $x>1$, $S=\left]1;e+1\right[$

4. Dérive chaque fonction en ne laissant pas d'exposant fractionnaire et/ou négatif :

Solutions :

(1) $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{2x+1}$ $\qquad$ $f'\left(x\right)=\dfrac{e^x\left(2x-1\right)}{\left(2x+1\right)^2}$

(2) $f\left(x\right)=\left(4x^3-5\right).e^{-2x}$ $\qquad$ $f'\left(x\right)=-2e^{-2x}\left(4x^3-6x^2-5\right)$

(3) $f\left(x\right)=\dfrac{3e^x+4}{2e^x+1}$ $\qquad$ $f'\left(x\right)=\dfrac{-5e^x}{\left(2e^x+1\right)^2}$

(4) $f\left(x\right)=\ln\left(\dfrac{2x+3}{3x+2}\right)$ $\qquad$ $f'\left(x\right)=\dfrac{-5}{\left(2x+3\right)\left(3x+2\right)}$

(5) $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x-1}$ $\qquad$ $f'\left(x\right)=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{\left(x-1\right)^2}$

(6) $f\left(x\right)=\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ $\qquad$ $f'\left(x\right)=\dfrac{-x}{1-x^2}$

5. Calcule les limites suivantes :

Solutions :

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^{-x}-1}$ $\qquad$ -1

(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}e^{3x-6}$ $\qquad$ 0

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{3x}+3x^2}{4e^x+2x^2}$ $\qquad$ $+\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-3e^x}{x-1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-3e^x}{x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-3e^x}{x-1}=-\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{-x}.e^x\right)$ $\qquad$ 0

(6) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2e^x+x}{e^{-x}+1}$ $\qquad$ 0

(7) $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}\right)$ 0

(8) $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}\right)$ 1

(9) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$ 0

6. Calcule sans calculatrice : $\log_3\left(\sin\dfrac{\pi}{3}.\cos\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{3}{2}.\log_3 2$.

Sol : $\log_3\left(\sin\dfrac{\pi}{3}.\cos\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{3}{2}.\log_3 2=\log_3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\log_3 2^{\frac{3}{2}}$

$$=\log_3\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)+\log_3\sqrt{2^3}$$
$$=\log_3\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)+\log_3\sqrt{8}$$
$$=\log_3\left(\frac{\sqrt{48}}{4}\right)$$
$$=\log_3\left(\frac{4\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$=\log_3\sqrt{3}$$
$$=\frac{1}{2}$$

7. Détermine le domaine de définition de la fonction $f(x)=\dfrac{2x}{3-\log_2(x+1)}$

Sol : CE1 : $3-\log_2(x+1)\neq0$

CE2 : $x+1>0$

$dom\,f=\left]-1;+\infty\right[\setminus\{7\}$

8. Détermine le domaine de définition de la fonction $f\left(x\right)=\sqrt{\ln x+\ln 3-\ln(2-3x)}$.

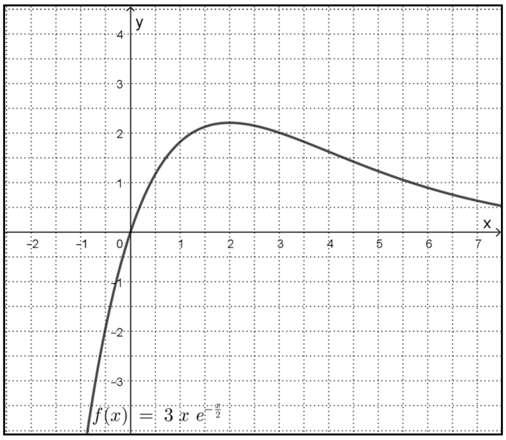
Sol : CE1 : $x>0$

CE2 : $2-3x>0$

CE3 : $\ln x+\ln 3-\ln(2-3x)\geq 0$

$dom\ f=\left[0;\frac{2}{3}\right[$

9. Voici le graphe de la fonction $f\left(x\right)=3x.e^{-\frac{x}{2}}$.



On considère le triangle *OAB* défini ainsi :

- *O* est l'origine du repère
- *A* est un point du graphe de *f* d'abscisse positive
- *B* est un point de l'axe des abscisses tel que la droite *AB* est verticale.

(1) Représente un tel triangle sur le graphique.

(2) Parmi tous les triangles possibles, détermine celui(ceux) qui a (ont) l'aire maximale.

Donne alors les coordonnées du point *A* et l'aire du triangle.

Sol : La fonction *f* dont on cherche le maximum exprime l'aire du triangle OAB en fonction de *x* où *x* est l'abscisse des points *A* et *B*.

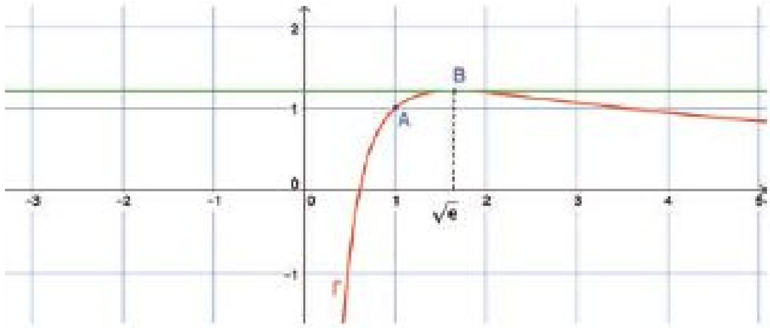
On a $f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2.e^{-\frac{x}{2}}$

f est maximale si $x=4$

D'où $A\left(4;12e^{-2}\right)$ et aire du triangle = $f\left(4\right)=3,25$

10. La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$f(x)=\dfrac{a\ln x+b}{x}$ où *a* et *b* sont des réels.



- Le point $A(1;1)$ appartient à G_f.
- La tangente à la courbe G_f au point *B* d'abscisse $\sqrt{e}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

(1) Détermine les valeurs de *a* et *b*.

Sol : On sait que $f(1)=1$ et $f'\left(\sqrt{e}\right)=0$.

Ainsi $a=2$ et $b=1$

(2) Etudie le sens de variation de la fonction *f*. (tableau de signe de f' et coordonnées du(des) extremums).

Sol : $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^2}$

x		0		$\sqrt{e}$	
$1-2\ln x$	$\nexists$	$\nexists$	+	0	–
x^2	+	0	+	+	+
f'	$\nexists$	$\nexists$	+	0	–
f	$\nexists$	$\nexists$	$\nearrow$	MAX $\left(\sqrt{e};\dfrac{2\sqrt{e}}{e}\right)$	$\searrow$

(3) Montre que la tangente à la courbe G_f au point *A* passe par l'origine du repère.

Sol : $T\equiv y=x$ Cette droite passe bien par l'origine du repère.

11. Dans des conditions ordinaires de pression et de température, la pression atmosphérique $P(h)$ mesurée à l'altitude *h* est donnée par : $P(h)=P_0.e^{-\alpha.h}$ où P_0 est la pression au niveau de la mer et α un coefficient qui vaut 0.125 si *h* est exprimé en km et $P(h)$ en pascals (Pa).

    On suppose que la pression atmosphérique vaut 100'000 Pa à l'altitude 0.

    (1) Que vaut-elle à 2000 m d'altitude ?

    Sol : $P(h)=100000.e^{-0,125h}$

    Ainsi $P(2)=77880,08$ Pa

    (2) À quelle altitude vaudra-t-elle 60'000 Pa ?

    Sol : $6000=P(h)\Leftrightarrow h=4087$ m

12. La loi de Beer-Lambert stipule que la quantité de lumière *I* qui pénètre à une profondeur de x mètres dans l'océan est donnée par : $I=I_0.c^x$ avec $0<c<1$ et où I_0 est la quantité de lumière à la surface.

    (1) Exprime x en fonction de logarithmes.

    Sol : $x=\dfrac{\ln I-\ln I_0}{\ln c}$

    (2) Si $c=0,25$, calcule la profondeur à laquelle $I=0,01.I_0$ (cela détermine la zone où la photosynthèse peut avoir lieu).

    Sol : $x=3,32$ m

13. Réalise l'étude complète de la fonction $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ (domaine, parité, intersections avec les axes, équation de toutes les asymptotes, dérivée première et tableau de variation, dérivée seconde et tableau de concavité, graphique)

    Eléments de solution :

    $dom\, f=\mathbb{R}_0^+\setminus\{1\}$ — *f* est quelconque — $\cap Ox$: aucune

    $\cap Oy$: $f(0)$ n'existe pas — $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ — $AV\equiv x=1$

    $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ n'a pas de sens — $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ — pas d'AO

    f possède un minimum en $(\sqrt{e};2e)$

    f ne possède pas de PI